Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre des opérateurs locaux sur l'espace des fonctions d'une variété

Norbert Poncin*

Département de Mathématique, Centre Universitaire de Luxembourg,

162 A, avenue de la Faïencerie, L-1511 Luxembourg

E-mail : poncin@cu.lu

On montre que les deux premiers espaces de cohomologie sont isomorphes aux espaces correspondants de la cohomologie de de Rham. La méthode utilisée est essentiellement basée sur une sorte de filtration par les champs de vecteurs, une technique symbolique consistant en la substitution d'éléments du dual de $\mathbb{R}^m$ aux dérivées et sur l'étude systématique des termes de degré $0, 1$ et 2 en ces formes. Nous retrouvons ainsi certains de nos résultats, établis dans [5,6], à l'aide d'une méthode complètement différente.

1. INTRODUCTION

Les problèmes de déformation de l'algèbre $N = C^\infty(M)$ des fonctions d'une variété M, symplectique ou de Poisson, ont mis en lumière certaines structures algébriques et les cohomologies associées.

Ceci est en particulier valable pour l'espace $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\, n.c.}$ (des applications multilinéaires, antisymétriques de $N \times \cdots \times N$ dans N, qui sont locales et nulles sur les constantes), que le crochet de Nijenhuis-Richardson ([3]) munit d'une structure d'algèbre de Lie graduée, et la cohomologie graduée de $\mathcal{E}$ associée à la représentation adjointe, soit $H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc}$, les indices -1 et loc indiquant qu'on se limite aux cochaînes locales, de poids -1. Il est clair que le terme $\mathcal{E}^0 = A^0(N)_{loc,\, n.c.} = \mathcal{L}(N)_{loc,\, n.c.}$ est une algèbre de Lie, admettant N comme espace de représentation. On montre ([2]) que la cohomologie graduée et la cohomologie $H(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ de Chevalley locale de l'algèbre $\mathcal{E}^0$, à valeurs dans les fonctions, sont liées par la relation

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc} = H(\ker\theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc},$$

où θ désigne l'application “restriction des cochaînes alternées à $\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0$”.

L'objectif de ce papier est la preuve du

THEOREME 1.1. *Si M est une variété de dimension $m \geq 3$, de classe C^∞, séparée et à base dénombrable,*

$$H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^p_{DR}(M) \quad (p \in \{0,1,2\}),$$

$H_{DR}(M)$ étant la cohomologie de de Rham de M.

P.B.A. Lecomte a énoncé ce résultat pour $p = 1$ dans [2] et nous l'avons nous-mêmes établi pour $p \in \{0,1,2,3\}$ dans [5,6]. La démonstration présentée ici est beaucoup plus simple que celle (non publiée) annoncée dans [2] et plus courte que celle de [5,6].

*Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet R&D no MEN/CUL/96/006.

2. POLYNOME SYMBOLISANT D'UNE COCHAINE

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et

$$L \in \mathcal{L}(C^\infty(U,E),\ C^\infty(U,F))_{loc}.$$

Cet opérateur est complètement déterminé par ses valeurs sur les fv $(f \in C^\infty(U),\ v \in E)$. Il découle d'un théorème de J. Peetre ([4]) que

$$L(fv) = \sum_\lambda L_\lambda((D^\lambda f)v),$$

où la série sur $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m) \in \mathbb{N}^m$ est localement finie, où les coefficients $L_\lambda \in C^\infty(U, \mathcal{L}(E,F))$ sont univoquement déterminés par L et où $D_x^\lambda f = D_{x^1}^{\lambda^1} \ldots D_{x^m}^{\lambda^m} f$. Nous représentons la dérivée partielle $D^\lambda f$ par le monôme $\zeta^\lambda = \zeta_1^{\lambda^1} \ldots \zeta_m^{\lambda^m}$ en les composantes $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ de $\zeta \in (\mathbb{R}^m)^*$. Ainsi, L admet le polynôme symbolisant $\mathrm{L} \in C^\infty(U, \vee\mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(E,F))$, défini par

$$\mathrm{L}(\zeta; v) = \sum_\lambda L_\lambda(v)\zeta^\lambda,$$

$\vee\mathbb{R}^m$ étant l'espace des tenseurs symétriques contravariants sur $\mathbb{R}^m$ i.e. l'espace des polynômes sur $(\mathbb{R}^m)^*$.

Dans le cas particulier $M = U$, cette règle permet de symboliser les arguments

$$A \in \mathcal{E}^0 = \mathcal{L}(C^\infty(U),\ C^\infty(U))_{loc,\ n.c.}$$

de nos cochaînes, donc notamment les éléments A_r de l'espace Diff^r $(r \in \mathbb{N}^*)$ des opérateurs différentiels homogènes de degré r :

$$A_r f = \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha} D^\alpha f \approx \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha}\xi^\alpha = \mathrm{A}_r(\xi),$$

où $f \in C^\infty(U)$, $|\alpha| = \alpha^1 + \cdots + \alpha^m$, $A_{r,\alpha} \in C^\infty(U)$ et $\xi \in (\mathbb{R}^m)^*$. Il est clair que la symbolisation $A_r \approx \mathrm{A_r}$ est un isomorphisme de l'espace Diff^r sur l'espace $C^\infty(U, \vee^r\mathbb{R}^m)$.

Ainsi, si T_r désigne la restriction à Diff^r d'une 1-cochaîne T,

$$T_r \in \mathcal{L}(C^\infty(U, \vee^r\mathbb{R}^m), C^\infty(U))_{loc},$$

de sorte que la même règle donne

$$T_r(fP_r) = \sum_\lambda T_{r,\lambda}((D^\lambda f)P_r) \approx \sum_\lambda T_{r,\lambda}(P_r)\zeta^\lambda = \mathrm{T}_r(\zeta; P_r),$$

avec $f \in C^\infty(U)$, $P_r \in \vee^r\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{T_r} \in C^\infty(U, \vee\mathbb{R}^m \otimes (\vee^r\mathbb{R}^m)^*)$. Il est facile de généraliser cette notion de représentation symbolique aux 1-cochaînes (non restreintes) et aux p-cochaînes. Dans la suite, nous utiliserons la même notation pour désigner un objet et sa représentation symbolique.

Considérons à présent une 1-cochaîne T et exprimons le polynôme symbolisant de la restriction $(\partial T)_{r,s}$ de ∂T à $\mathrm{Diff}^r \times \mathrm{Diff}^s$ $(r, s \in \mathbb{N}^*)$, à l'aide de la représentation symbolique de T. Symbolisons donc dans

$$(\partial T)_{r,s}(fP_r, gQ_s) = fP_r(T(gQ_s)) - gQ_s(T(fP_r)) - T([fP_r, gQ_s]),$$

où

$$fP_r = \sum_{|\alpha|=r} fP_{r,\alpha}(\cdot)^\alpha = \sum_{|\alpha|=r} fP_{r,\alpha}D^\alpha \quad (P_{r,\alpha} \in \mathbb{R})$$

et

$$gQ_s = \sum_{|\beta|=s} gQ_{s,\beta}(\cdot)^\beta = \sum_{|\beta|=s} gQ_{s,\beta}D^\beta \quad (Q_{s,\beta} \in \mathbb{R}),$$

les dérivées de f et de g par ζ resp. η. En ce qui concerne le terme $fP_r(T(gQ_s))$, notons que D^α dérive les coefficients de T et g selon la règle de Leibniz. Si l'on représente les dérivées des coefficients, qui ne sont pas à symboliser, provisoirement par $*$, on trouve

$$fP_r(T(gQ_s)) \approx P_r(*+\eta)T(\eta;Q_s).$$

Quant à $T(fP_r \circ gQ_s)$, comme l'argument est symbolisé par

$$fP_r \circ gQ_s \approx fgP_r(\eta+\cdot)Q_s,$$

on a

$$T(fP_r \circ gQ_s) \approx T(\zeta+\eta;P_r(\eta+\cdot)Q_s).$$

D'où le

LEMME 2.1. *L'écriture symbolique du bord ∂T d'une 1-cochaîne T est donnée par*

$$\partial T(\zeta,\eta;P_r,Q_s) = P_r(*+\eta)T(\eta;Q_s) - Q_s(*+\zeta)T(\zeta;P_r) - T(\zeta+\eta;Q_s\tau_\eta P_r - P_r\tau_\zeta Q_s),$$

où $\zeta,\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$, $P_r \in \vee^r\mathbb{R}^m$, $Q_s \in \vee^s\mathbb{R}^m$, où $*$ représente les dérivées des coefficients de T et où $\tau_\theta R = R(\theta+\cdot) - R(\cdot)$, quels que soient $\theta \in (\mathbb{R}^m)^*$ et $R \in \vee\mathbb{R}^m$.

La généralisation de ce résultat aux p-cochaînes est immédiate.

3. PREMIER ESPACE DE COHOMOLOGIE

Cette section est consacrée au calcul de $H^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$, dans le cas où M est un ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$.

PROPOSITION 3.1. *Si $m \geq 2$, si $U \in O(\mathbb{R}^m)$ est contractile et si $\mathcal{E}^0$ et N sont construits sur U, on a*

$$H^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc} = 0.$$

Preuve. (a) Soit $T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc} \cap \ker\partial$. La restriction T_1 de T à l'espace $\mathcal{H}(U)$ des champs de vecteurs de U, étant un 1-cocycle du complexe de Chevalley local de l'algèbre des champs de vecteurs, associé à la dérivée de Lie des fonctions,

$$T_1 = \partial f + c_1 \mathrm{div},$$

où $f \in N$, $c_1 \in \mathbb{R}$ et où div est la divergence. Posons $T' = T - \partial f$ et rebaptisons T cet 1-cocycle du complexe de Chevalley de $\mathcal{E}^0$. On a alors, pour $\zeta \in (\mathbb{R}^m)^*$ et $X \in \mathbb{R}^m$,

$$T(\zeta;X) = c_1 \langle X,\zeta\rangle.$$

(b) Après cette exploitation de l'équation de cocycle évaluée sur deux champs de vecteurs, écrivons-la pour un champ et un opérateur différentiel homogène d'ordre $s \geq 2$. De manière plus précise, considérons l'équation symbolisée $(\partial T)(\zeta,\eta;X,Y^s) = 0$, avec $\zeta,\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ et $X,Y \in \mathbb{R}^m$. Vu le lemme 2.1. et vu que $c_1 \in \mathbb{R}$, elle est donnée par

$$\begin{aligned}(X.T)(\eta;Y^s) \quad &+ \quad \langle X,\eta\rangle T(\eta;Y^s) - c_1\langle X,\zeta\rangle\langle Y,\zeta\rangle^s - \langle X,\eta\rangle T(\zeta+\eta;Y^s)\\ &+ \quad T(\zeta+\eta;X\tau_\zeta Y^s) = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

où $X.T$ signifie que X dérive les coefficients de T.

(b.1.) En sélectionnant dans (1) les termes de degré 0 en ζ, on obtient

$$(X.T)(\eta;Y^s) = 0,$$

ce qui veut évidemment dire que T est à coefficients constants.

(b.2.) Si l'on exprime que la somme des termes de (1), qui sont de degré 1 en ζ, est nulle, on trouve

$$-\langle X,\eta\rangle\,(\zeta D_\eta)T(\eta;Y^s)+s\,\langle Y,\zeta\rangle\,T(\eta;XY^{s-1})=0,$$

ζD_η étant la dérivée en η dans la direction de ζ. Cette égalité s'écrivant encore

$$\rho(X\otimes\zeta)T(\eta;Y^s)=0,$$

où $\rho(X\otimes\zeta)$ désigne l'action naturelle de $X\otimes\zeta\in gl(m,\mathbb{R})$, et $T(\eta;Y^s)$ étant polynomial en η et en Y (et même homogène de degré s en Y), il résulte d'un théorème bien connu de H. Weyl que

$$T(\eta;Y^s)=c_s\,\langle Y,\eta\rangle^s\,,$$

avec $c_s\in\mathbb{R}$.

(b.3.) Déterminons enfin les termes de degré 2 en ζ. Il suffit de noter que le dernier terme de (1) est égal à

$$\sum_{i=1}^{s}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}\langle Y,\zeta\rangle^i\,T(\zeta+\eta;XY^{s-i})=\sum_{i=1}^{s}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}c_{s-i+1}\,\langle X,\zeta+\eta\rangle\,\langle Y,\zeta\rangle^i\,\langle Y,\zeta+\eta\rangle^{s-i}\,,$$

pour voir que les termes cherchés fournissent l'équation

$$\frac{s(s-1)}{2}\,(c_s+c_{s-1})\,\langle X,\eta\rangle\,\langle Y,\zeta\rangle^2\,\langle Y,\eta\rangle^{s-2}+sc_s\,\langle X,\zeta\rangle\,\langle Y,\zeta\rangle\,\langle Y,\eta\rangle^{s-1}=0.$$

Or, il est clair que si $P\in\vee(\mathbb{R}^{n^2})^*$ et si $P(\langle X_1,\zeta_1\rangle,\ldots,\langle X_n,\zeta_1\rangle,\ldots,\langle X_1,\zeta_n\rangle,\ldots,\langle X_n,\zeta_n\rangle)=0$, quels que soient les $\zeta_i\in(\mathbb{R}^m)^*$ et les $X_i\in\mathbb{R}^m$, les coefficients de P sont nuls, si $m\geq n$. Ainsi, $c_s=0$ et $c_{s-1}=0$ i.e. $c_t=0$, pour tout $t\geq 1$, donc $T=0$. ■

4. DEUXIEME ESPACE DE COHOMOLOGIE

Nous établirons la

PROPOSITION 4.1. *Si $m\geq 3$, si $U\in O(\mathbb{R}^m)$ est contractile et si $\mathcal{E}^0$ et N sont construits sur U, on a*

$$H^2(\mathcal{E}^0,N)_{loc}=0.$$

Preuve. (a) Si $T\in\wedge^2(\mathcal{E}^0,N)_{loc}\cap\ker\partial$, la restriction $T_{1,1}$ de T à $\mathcal{H}(U)\times\mathcal{H}(U)$, est un 2-cocycle du complexe de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, de sorte que

$$T_{1,1}=\partial S,$$

avec $S\in\wedge^1(\mathcal{H}(U),N)_{loc}$. On définit S sur $A\in\mathcal{E}^0$, en posant

$$S(A)=S\left(\sum_{\alpha\neq 0}A_\alpha D^\alpha\right)=S\left(\sum_{i=1}^{m}A_{e_i}D_{x^i}\right),$$

où $A_\alpha\in N$ et où $(e_1,\ldots,e_m)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Alors, $T'=T-\partial S$ est un 2-cocycle du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{E}^0$, que nous rebaptisons T et qui vérifie

$$T(\zeta,\eta;X,Y)=0, \tag{2}$$

quels que soient $\zeta,\eta\in(\mathbb{R}^m)^*$ et $X,Y\in\mathbb{R}^m$.

(b) L'équation de cocycle écrite pour deux champs de vecteurs et un opérateur différentiel homogène d'ordre $t \geq 2$, se lit

$$\begin{aligned}
&(X.T)(\eta,\vartheta;Y,Z^t) + \langle X,\eta+\vartheta\rangle\, T(\eta,\vartheta;Y,Z^t) \\
-&\quad (Y.T)(\zeta,\vartheta;X,Z^t) - \langle Y,\zeta+\vartheta\rangle\, T(\zeta,\vartheta;X,Z^t) \\
-&\quad T(\zeta+\eta,\vartheta;\langle X,\eta\rangle\, Y - \langle Y,\zeta\rangle\, X, Z^t) \\
+&\quad T(\zeta+\vartheta,\eta;\langle X,\vartheta\rangle\, Z^t - X\tau_\zeta Z^t, Y) \\
-&\quad T(\eta+\vartheta,\zeta;\langle Y,\vartheta\rangle\, Z^t - Y\tau_\eta Z^t, X) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

(b.1.) Les termes de (3), qui sont de degré 0 en ζ, s'écrivent

$$\begin{aligned}
(X.T)(\eta,\vartheta;Y,Z^t) \quad &- \quad (Y.T)(0,\vartheta;X,Z^t) - \langle Y,\vartheta\rangle\, T(0,\vartheta;X,Z^t) \\
&- \quad T(\eta+\vartheta,0;\langle Y,\vartheta\rangle\, Z^t - Y\tau_\eta Z^t, X) = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

et ceux de degré 0 en ζ et en η, donnent l'équation

$$(X.T)(0,\vartheta;Y,Z^t) = (Y.T)(0,\vartheta;X,Z^t). \tag{5}$$

L'ouvert U étant contractile et le cocycle T étant nul sur les couples de champs de vecteurs, (5) implique qu'il existe une cochaîne $S \in \wedge^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$, telle que $(X.S)(\vartheta;Z) = T(0,\vartheta;X,Z)$ et $S(\zeta;X) = 0$. En corrigeant T par ∂S, on obtient un nouveau cocycle T', tel que $T'(\zeta,\eta;X,Y) = 0$ et

$$\begin{aligned}
&T'(\zeta,\vartheta;X,Z^t) \\
&= \quad T(\zeta,\vartheta;X,Z^t) - T(0,\vartheta;X,Z^t) - \langle X,\vartheta\rangle\, S(\vartheta;Z^t) + S(\zeta+\vartheta;\langle X,\vartheta\rangle\, Z^t - X\tau_\zeta Z^t).
\end{aligned}$$

Si l'on note T au lieu de T', il s'ensuit que

$$T(0,\vartheta;X,Z^t) = 0. \tag{6}$$

Ceci étant, il découle de (4) que $T(\eta,\vartheta;Y,Z^t)$ est *à coefficients constants*.

(b.2.) La détermination dans (3), des termes de degré 1 en ζ et de ceux de degré 1 en ζ et en η, conduit aux équations

$$\begin{aligned}
-&\quad \langle Y,\vartheta\rangle\, T^{1,*}(\zeta,\vartheta;X,Z^t) + \langle Y,\vartheta\rangle\, T^{1,*}(\zeta,\eta+\vartheta;X,Z^t) - T^{1,*}(\zeta,\eta+\vartheta;X,Y\tau_\eta Z^t) \\
-&\quad \langle X,\eta\rangle\, (\zeta D_\eta)T(\eta,\vartheta;Y,Z^t) + \langle Y,\zeta\rangle\, T(\eta,\vartheta;X,Z^t) \\
-&\quad \langle X,\vartheta\rangle\, (\zeta D_\vartheta)T(\eta,\vartheta;Y,Z^t) + t\,\langle Z,\zeta\rangle\, T(\eta,\vartheta;Y,XZ^{t-1}) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

resp.

$$\begin{aligned}
&-\langle X,\vartheta\rangle\, (\zeta D_\vartheta)T^{1,*}(\eta,\vartheta;Y,Z^t) + t\,\langle Z,\zeta\rangle\, T^{1,*}(\eta,\vartheta;Y,XZ^{t-1}) \\
&\quad + \quad \langle Y,\vartheta\rangle\, (\eta D_\vartheta)T^{1,*}(\zeta,\vartheta;X,Z^t) - t\,\langle Z,\eta\rangle\, T^{1,*}(\zeta,\vartheta;X,YZ^{t-1}) \\
&\quad + \quad \langle Y,\zeta\rangle\, T^{1,*}(\eta,\vartheta;X,Z^t) - \langle X,\eta\rangle\, T^{1,*}(\zeta,\vartheta;Y,Z^t) = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

où les indices 1 et $*$ signifient qu'on se limite aux termes de degré 1 en la première forme, le degré en la seconde étant arbitraire. Il est clair que $T^{1,*}$ peut être interprété comme 1-cochaîne de $gl(m,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^m)^*$, à valeurs dans $E_t = \vee\mathbb{R}^m \otimes (\vee^t\mathbb{R}^m)^*$. Comme

$$[X\otimes\zeta, Y\otimes\eta] = \langle Y,\zeta\rangle\, X\otimes\eta - \langle X,\eta\rangle\, Y\otimes\zeta,$$

l'équation (8) se lit

$$-(\partial_\rho T^{1,*})(X\otimes\zeta, Y\otimes\eta)(\vartheta;Z^t) = 0,$$

où ρ est la représentation naturelle de $gl(m,\mathbb{R})$ sur E_t. La cochaîne $T^{1,*}$ étant ainsi un 1-cocycle de $gl(m,\mathbb{R})$, elle s'écrit

$$T^{1,*}(\zeta,\vartheta;X,Z^t) = (\rho(X\otimes\zeta)S_t)(\vartheta;Z^t) + c_t\,\langle X,\zeta\rangle\, \langle Z,\vartheta\rangle^t\,,$$

où $S_t \in E_t$ et où $c_t \in \mathbb{R}$. Les S_t $(t \geq 2)$ définissent évidemment un $S \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$, qui est nul sur les champs de vecteurs et à coefficients constants. Vu qu'en outre

$$(\partial S)(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = \langle X, \vartheta\rangle\, S(\vartheta; Z^t) - \langle X, \vartheta\rangle\, S(\zeta + \vartheta; Z^t) + S(\zeta + \vartheta; X\tau_\zeta Z^t),$$

le 2-cocycle $T' = T + \partial S$ hérite de toutes les propriétés de T et vérifie

$$T'^{1,*}(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = c_t \langle X, \zeta\rangle \langle Z, \vartheta\rangle^t . \tag{9}$$

Ecrivons dans la suite T au lieu de T' et désignons par F_t, l'espace des polynômes en $\eta, \vartheta \in (\mathbb{R}^m)^*$, à valeurs dans les formes linéaires en $Y \in \mathbb{R}^m$, $P_t \in \vee^t \mathbb{R}^m$. On remarquera que $T = T(\eta, \vartheta; Y, P_t)$ est une 0-cochaîne de $gl(m, \mathbb{R})$, à valeurs dans F_t et que, compte tenu de (9), l'équation (7) s'écrit

$$\begin{aligned}&(\partial_\rho T)(X \otimes \zeta)(\eta, \vartheta; Y, Z^t)\\ &- \left[c_t \langle Y, \vartheta\rangle \left(\langle Z, \eta + \vartheta\rangle^t - \langle Z, \vartheta\rangle^t\right) - \langle Y, \eta + \vartheta\rangle \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i!}\, c_{t-i+1} (\eta D_\vartheta)^i \langle Z, \eta + \vartheta\rangle^t \right] \operatorname{tr}(X \otimes \zeta) = 0.\end{aligned}$$

Le premier membre de cette égalité appartenant à

$$B^1(gl(m, \mathbb{R}), F_t) \oplus F_{t,\, inv} \otimes \wedge^1_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}),$$

où $B^1(gl(m, \mathbb{R}), F_t)$ dénote l'espace des 1-bords, $F_{t,\, inv}$ celui des éléments invariants de F_t et $\wedge^1_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ l'espace des 1-cochaînes scalaires invariantes, ses deux termes sont séparément nuls. L'annulation du premier montre que $T = T(\eta, \vartheta; Y, P_t)$ est *invariant sous* $gl(m, \mathbb{R})$. Le second est un polynôme en les évaluations, dont les coefficients sont nuls. Celui de son terme en $\langle X, \zeta\rangle \langle Y, \eta\rangle \langle Z, \eta\rangle \langle Z, \vartheta\rangle^{t-1}$ valant tc_t, il découle finalement de (9) que

$$T^{1,*}(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = 0. \tag{10}$$

Notons que la constance des coefficients, l'invariance sous $gl(m, \mathbb{R})$, (6) et (10), se traduisent par

$$\begin{aligned}T(\zeta, \vartheta; X, Z^t) &= \langle X, \zeta\rangle\, A_t(\langle Z, \zeta\rangle, \langle Z, \vartheta\rangle) + \langle X, \vartheta\rangle\, B_t(\langle Z, \zeta\rangle, \langle Z, \vartheta\rangle)\\ &= \langle X, \zeta\rangle \sum_{i=1}^{t} a_{i,t} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \vartheta\rangle^{t-i} + \langle X, \vartheta\rangle \sum_{i=2}^{t} b_{i,t} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \vartheta\rangle^{t-i},\end{aligned}$$

avec $a_{i,t},\ b_{i,t} \in \mathbb{R}$.

(b.3.) Considérons à présent les termes de (3), qui sont de degré 2 en ζ. Il vient

$$\begin{aligned}&- \langle Y, \vartheta\rangle\, T^{2,*}(\zeta, \vartheta; X, Z^t)\\ &- \frac{1}{2} \langle X, \eta\rangle (\zeta D_\eta)^2 T(\eta, \vartheta; Y, Z^t) + \langle Y, \zeta\rangle (\zeta D_\eta) T(\eta, \vartheta; X, Z^t)\\ &- \frac{1}{2} \langle X, \vartheta\rangle (\zeta D_\vartheta)^2 T(\eta, \vartheta; Y, Z^t) + \langle Z, \zeta\rangle (\zeta D_\vartheta)(X D_Z) T(\eta, \vartheta; Y, Z^t)\\ &+ \frac{t}{2} \langle Z, \zeta\rangle^2 (X D_Z) T(\eta, \vartheta; Y, Z^{t-1}) + \langle Y, \vartheta\rangle\, T^{2,*}(\zeta, \eta + \vartheta; X, Z^t)\\ &- \sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i} \frac{1}{t - i + 1} \langle Z, \eta\rangle^i (Y D_Z) T^{2,*}(\zeta, \eta + \vartheta; X, Z^{t-i+1}) = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

où $T^{2,*}$ désigne la somme des termes de T, dont le degré en la première forme est égal à 2 et où le terme $i = t$ est nul, vu (2). Si l'on remarque que

$$T^{2,*}(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = a_{1,t} \langle X, \zeta\rangle \langle Z, \zeta\rangle \langle Z, \vartheta\rangle^{t-1} + b_{2,t} \langle X, \vartheta\rangle \langle Z, \zeta\rangle^2 \langle Z, \vartheta\rangle^{t-2}$$

et on détermine dans (11) les termes en $\langle X, \zeta\rangle \langle Y, \zeta\rangle$, on voit que $A_t(\langle Z, \zeta\rangle, \langle Z, \vartheta\rangle)$ s'écrit

$$A_t(\langle Z, \zeta\rangle, \langle Z, \vartheta\rangle) = \sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i} \frac{a_{1,t-i+1}}{t - i + 1} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^{t-i} .$$

Ceci étant, soit $S \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$, défini par $S(\vartheta; Z^s) = c_s \langle Z, \vartheta\rangle^s$ $(s \geq 1,\ c_s \in \mathbb{R})$ et soit $T' = T - \partial S$. Comme

$$\begin{aligned}
&(\partial S)(\zeta, \vartheta; X, Z^s)\\
&= \langle X, \vartheta\rangle S(\vartheta; Z^s) - \langle Z, \zeta\rangle^s S(\zeta, X) - S(\zeta + \vartheta; \langle X, \vartheta\rangle Z^s - X\tau_\zeta Z^s)\\
&= c_1 \langle X, \vartheta\rangle \langle Z, \zeta\rangle^s - c_s \langle X, \vartheta\rangle (\langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^s - \langle Z, \vartheta\rangle^s)\\
&\quad + \langle X, \zeta + \vartheta\rangle \sum_{i=1}^{s-1} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} c_{s-i+1} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^{s-i},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
&T'(\zeta, \vartheta; X, Z^t)\\
&= \langle X, \zeta\rangle \left[\sum_{i=1}^{t-1} \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{a_{1,t-i+1}}{t-i+1} - c_{t-i+1}\right) \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^{t-i}\right]\\
&+ \langle X, \vartheta\rangle \left[\sum_{i=2}^{t} b_{i,t} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \vartheta\rangle^{t-i} - c_1 \langle Z, \zeta\rangle^t + c_t(\langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^t - \langle Z, \vartheta\rangle^t)\right.\\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{t-1} \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} c_{t-i+1} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \zeta + \vartheta\rangle^{t-i}\right].
\end{aligned}$$

En prenant $c_s = a_{1,s}/s$, pour tout $s \geq 2$ et $c_1 = b_{2,2} - c_2$, on obtient

$$T'(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = \langle X, \vartheta\rangle B'_t(\langle Z, \zeta\rangle, \langle Z, \vartheta\rangle) = \langle X, \vartheta\rangle \sum_{i=2}^{t} b'_{i,t} \langle Z, \zeta\rangle^i \langle Z, \vartheta\rangle^{t-i}, \tag{12}$$

où $b'_{i,t} \in \mathbb{R}$ et où $b'_{2,2} = 0$. Dans la suite, T', B'_t et les $b'_{i,t}$ seront notés T, B_t resp. $b_{i,t}$. Le nouveau cocycle T conserve les propriétés de l'ancien. Si on utilise (12) pour développer (11) et si on cherche les termes en $\langle X, \eta\rangle \langle Y, \eta\rangle \langle Z, \zeta\rangle^2$, en $\langle X, \zeta\rangle \langle Y, \vartheta\rangle \langle Z, \zeta\rangle$, en $\langle X, \vartheta\rangle \langle Y, \vartheta\rangle \langle Z, \zeta\rangle^2$ et en $\langle X, \vartheta\rangle \langle Y, \zeta\rangle \langle Z, \zeta\rangle$, on trouve facilement les équations

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t-2} \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \frac{t-i-1}{t-i+1} b_{2,t-i+1} \langle Z, \eta\rangle^i \langle Z, \eta + \vartheta\rangle^{t-i-2} &= 0, & (13)\\
D_{\langle Z, \vartheta\rangle} B_t &= 0, & (14)\\
b_{2,t}(\langle Z, \eta + \vartheta\rangle^{t-2} - \langle Z, \vartheta\rangle^{t-2}) &= 0, & (15)\\
D_{\langle Z, \eta\rangle} B_t &= 0, & (16)
\end{aligned}$$

en tenant compte de (13) et (14) (de (15)) en (15) (en (16)). Il découle alors de (12) et (16) que

$$T(\zeta, \vartheta; X, Z^t) = 0. \tag{17}$$

(c) Ecrivons l'équation de cocycle pour un champ de vecteurs et deux opérateurs différentiels homogènes d'ordre $s \geq 2$ et $t \geq 2$:

$$\begin{aligned}
&(X.T)(\eta, \vartheta; Y^s, Z^t) + \langle X, \eta + \vartheta\rangle T(\eta, \vartheta; Y^s, Z^t)\\
&- T(\zeta + \eta, \vartheta; \langle X, \eta\rangle Y^s - X\tau_\zeta Y^s, Z^t) + T(\zeta + \vartheta, \eta; \langle X, \vartheta\rangle Z^t - X\tau_\zeta Z^t, Y^s) = 0.
\end{aligned}$$

(c.1.) En sélectionnant les termes de degré 0 en ζ, on trouve

$$(X.T)(\eta, \vartheta; Y^s, Z^t) = 0,$$

de sorte que T est *à coefficients constants*.

(c.2.) Les termes de degré 1 en ζ,

$$\begin{aligned} & -\langle X,\eta\rangle(\zeta D_\eta)T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)+s\langle Y,\zeta\rangle T(\eta,\vartheta;XY^{s-1},Z^t)\\ & - \quad \langle X,\vartheta\rangle(\zeta D_\vartheta)T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)+t\langle Z,\zeta\rangle T(\eta,\vartheta;Y^s,XZ^{t-1})=0,\end{aligned}$$

montrent que T est *invariant par* $gl(m,\mathbb{R})$:

$$T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)=A_{s,t}(\langle Y,\eta\rangle,\langle Y,\vartheta\rangle,\langle Z,\eta\rangle,\langle Z,\vartheta\rangle), \tag{18}$$

où le second membre est un polynôme en les évaluations $\langle Y,\eta\rangle,\langle Y,\vartheta\rangle,\langle Z,\eta\rangle,\langle Z,\vartheta\rangle$, qui est de degré s en Y et de degré t en Z.

(c.3.) Les termes de degré 2 en ζ s'écrivent

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\langle X,\eta\rangle(\zeta D_\eta)^2T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)\\ & + \quad (Y,\zeta)(\zeta D_\eta)(XD_Y)T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)+\frac{s}{2}\langle Y,\zeta\rangle^2(XD_Y)T(\eta,\vartheta;Y^{s-1},Z^t)\\ & - \quad \frac{1}{2}\langle X,\vartheta\rangle(\zeta D_\vartheta)^2T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)+\langle Z,\zeta\rangle(\zeta D_\vartheta)(XD_Z)T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)\\ & + \quad \frac{t}{2}\langle Z,\zeta\rangle^2(XD_Z)T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^{t-1})=0.\end{aligned}$$

En tenant compte de (18) et en déterminant les termes en $\langle X,\zeta\rangle\langle Y,\zeta\rangle$, en $\langle X,\zeta\rangle\langle Z,\zeta\rangle$ et en $\langle X,\eta\rangle\langle Y,\zeta\rangle\langle Z,\zeta\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{\langle Y,\eta\rangle}A_{s,t} &= 0,\\ D_{\langle Z,\vartheta\rangle}A_{s,t} &= 0,\\ D_{\langle Y,\vartheta\rangle\langle Z,\eta\rangle}A_{s,t} &= 0,\end{aligned}$$

équations qui impliquent

$$T(\eta,\vartheta;Y^s,Z^t)=0. \tag{19}$$

■

5. CAS D'UNE VARIETE ARBITRAIRE

Preuve de 1.1. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, un recouvrement contractile (i.e. tel que toute intersection finie, non vide $U_{i_0\dots i_p}=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}$ soit contractile) de M par des domaines de coordonnées locales.

(a) Le cas $p=0$ est trivial.

(b) Si $p=1$, on définit $\tau\in\mathcal{L}(\Omega^1(M)\cap\ker d,\wedge^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc}\cap\ker\partial)$, où $\Omega(M)$ est l'espace des formes différentielles sur M et d la différentielle extérieure, en posant, pour toute 1-forme fermée α et tout entier naturel i, tels que $\alpha|_{U_i}=df_i\quad(f_i\in N_{U_i})$,

$$\tau_{\alpha,i}=\partial f_i.$$

Cet opérateur τ induit un opérateur $\tau_\sharp$ de $H^1_{DR}(M)$ dans $H^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$, qui est évidemment injectif. Il est également surjectif. En effet, si $T\in\wedge^1(\mathcal{E}^0,N)_{loc}\cap\ker\partial$, il découle de la proposition 3.1. que $T|_{U_i}=\partial S_i$ $(S_i\in N_{U_i})$. Il s'ensuit que les $\alpha_i=dS_i$ définissent une 1-forme fermée α sur M et que $\tau_\alpha=T$.

(c) Si $p=2$, nous désignons par $\wedge$ n'importe quel opérateur local de $\mathcal{E}^0=A^0(N)_{loc,\,n.c.}$ dans $A^0(\Omega^1(M),N)_{loc}$, tel que $\widehat{A}(df)=A(f)$, quels que soient $A\in\mathcal{E}^0$ et $f\in N$. On vérifie facilement que tout opérateur de ce type est tel que, pour tout $X\in\mathcal{H}(M)$, $\widehat{X}=i(X)$, où i est le produit intérieur.

Si $\beta \in \Omega^2(M) \cap \ker d$ et $i \in \mathbb{N}$ sont tels que $\beta|_{U_i} = d\alpha_i$ ($\alpha_i \in \Omega^1(U_i)$), nous posons

$$\tau_{\beta,i} = \partial(i(\alpha_i) \circ \wedge),$$

de manière à définir $\tau \in \mathcal{L}(\Omega^2(M)\cap\ker d, \wedge^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc}\cap\ker\partial)$. De fait, il résulte des égalités $\beta|_{U_i} = d\alpha_i$, qu'il existe $f_{ij} \in N_{U_{ij}}$, tel que $i(\alpha_i|_{U_{ij}}) \circ \wedge = i(\alpha_j|_{U_{ij}}) \circ \wedge + \partial f_{ij}$. L'application τ induit de nouveau une application linéaire $\tau_\sharp$ en cohomologie.

Cette application $\tau_\sharp$ est injective, car si $\tau_\beta = \partial S$, avec $S \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ et si $\beta|_{U_i} = d\alpha_i$, on a $S|_{U_i} - i(\alpha_i)\circ\wedge \in \wedge^1(\mathcal{E}^0_{U_i}, N_{U_i})_{loc}\cap\ker\partial$. Vu 3.1., il existe alors $f_i \in N_{U_i}$, tel que $S|_{U_i} = i(\alpha_i)\circ\wedge+\partial f_i = i(\alpha_i + df_i) \circ \wedge$. Ainsi,

$$(\alpha_i + df_i)|_{U_{ij}}(X) = \widehat{X}((\alpha_i + df_i)|_{U_{ij}}) = \widehat{X}((\alpha_j + df_j)|_{U_{ij}}) = (\alpha_j + df_j)|_{U_{ij}}(X),$$

quel que soit $X \in \mathcal{H}(U_{ij})$, de sorte que les $\alpha_i + df_i$ définissent une 1-forme sur M, de bord β.

Prouvons que $\tau_\sharp$ est aussi surjectif. Si $T \in \wedge^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \cap \ker\partial$, la proposition 4.1. montre qu'il existe $S_i \in \wedge^1(\mathcal{E}^0_{U_i}, N_{U_i})_{loc}$, tel que

$$T|_{U_i} = \partial S_i.$$

Comme $S_i|_{U_{ij}} - S_j|_{U_{ij}}$ est alors un 1-cocycle, il découle de (b) que

$$S_i|_{U_{ij}} - S_j|_{U_{ij}} = \tau_{\alpha_{ij}} = \partial f_{ij} = i(df_{ij}) \circ \wedge,$$

où $\alpha_{ij} \in \Omega^1(U_{ij}) \cap \ker d$ et $f_{ij} \in N_{U_{ij}}$ sont tels que $df_{ij} = \alpha_{ij}$. Notons à présent que $\alpha : (i,j) \to \alpha_{ij}$ est une 1-cochaîne de Čech de M, à valeurs dans les 1-formes. En effet, $i(df_{ji}) \circ \wedge = i(-df_{ij}) \circ \wedge$ implique $\alpha_{ji} = df_{ji} = -df_{ij} = -\alpha_{ij}$. Etant donné que $i(d(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})) \circ \wedge$, où toutes les fonctions sont restreintes à U_{ijk}, est nul, on a $(\delta\alpha)_{ijk} = \alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = 0$, où δ désigne le cobord de Čech. Par conséquent, α est un 1-cocycle, donc $\alpha = \delta\eta$, où η est une 0-cochaîne de Čech. Il s'ensuit que

$$df_{ij} = \alpha_{ij} = \eta_j - \eta_i$$

et donc que

$$S_i|_{U_{ij}} - S_j|_{U_{ij}} = i(\eta_j) \circ \wedge - i(\eta_i) \circ \wedge.$$

Finalement, les $d\eta_i$ et les $S_i + i(\eta_i) \circ \wedge$ définissent respectivement une forme $\zeta \in \Omega^2(M) \cap \ker d$ et une cochaîne $R \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$, telles que

$$\tau_{-\zeta}|_{U_i} = \partial(i(-\eta_i) \circ \wedge) = (T - \partial R)|_{U_i},$$

de sorte que

$$\tau_\sharp[-\zeta] = [T].$$

■

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie les Professeurs M. De Wilde et P.B.A. Lecomte pour les discussions fructueuses qu'il a pu avoir avec eux.

REFERENCES

[1] P.B.A. Lecomte, Application of the Cohomology of Graded Lie Algebras to Formal Deformations of Lie Algebras, *Lett. Math. Phys.* **13** (1987), 157-166.

[2] P.B.A. Lecomte, D. Melotte and C. Roger, Explicit Form and Convergence of 1-Differential Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra, *Lett. Math. Phys.* **18** (1989), 275-285.

[3] A. Nijenhuis and R. Richardson, Deformation of Lie algebra structures, *J. of Math. and Mech.* **17** (1967), 89-105.

[4] J. Peetre, Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels, *Math. Scand.* **7** (1959) et **8** (1960), 211-218 et 116-120.

[5] N. Poncin, Premier et deuxième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Sc. Liège* (1999) (à paraître).

[6] N. Poncin, Troisième espace de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Sc. Liège* (1999) (à paraître).